PART3　最大公約数と最小公倍数

例題

(1)　36，234 の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(2)　n は自然数とする。$n+7$ は 5 の倍数，$n+5$ は 7 の倍数であるとき，$n+12$ は 35 の倍数であることを証明せよ。

Point Pickup

練習

(1)　84，126，630 の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(2)　n は自然数とする。$n+5$ は 3 の倍数，$n+6$ は 5 の倍数であるとき，$n+11$ は 15 の倍数であることを証明せよ。

第 8 講　PART3　確認問題

1 60，96 の最大公約数は [アイ]，最小公倍数は [ウエオ] である。

2 n は自然数とする。$n+4$ は 3 の倍数，$n+3$ は 4 の倍数であるとき，$n+7$ は 12 の倍数 であることを証明せよ。

ただし，[カ] は下の①～④のうちから選べ。

[証明]

$n+4$ は 3 の倍数，$n+3$ は 4 の倍数であるから

[カ]（k，l は自然数）

と表される。

$n+7=(n+$ [キ] $)+3=3k+3=3(k+1)$

$n+7=(n+$ [ク] $)+4=4l+4=4(l+1)$

よって　$3(k+1)=4(l+1)$

3 と 4 は互いに素であるから，$k+1$ は [ケ] の倍数である。

よって，$k+1=$ [ケ] m　（m は自然数）と表される。

したがって，$n+7=3(k+1)=3\cdot$ [ケ] $m=12m$ より，$n+7$ は 12 の倍数である。

[カ] の選択肢

①　$n+4=4k$，$n+3=3l$　　②　$n+4=12k$，$n+3=12l$

③　$n+4=3k$，$n+3=4l$　　④　$n+4=7k$，$n+3=7l$

PART3　最大公約数と最小公倍数

例題

(1)　36，234 の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(2)　n は自然数とする。$n+7$ は 5 の倍数，$n+5$ は 7 の倍数であるとき，$n+12$ は 35 の倍数であることを証明せよ。

(1)　$36=2^2\cdot 3^2$，$234=2\cdot 3^2\cdot 13$

よって，最大公約数は $2\cdot 3^2=18$，最小公倍数は $2^2\cdot 3^2\cdot 13=468$

(2)　$n+7$ は 5 の倍数，$n+5$ は 7 の倍数であるから

$$n+7=5k,\ n+5=7l\ (k,\ l \text{ は自然数})$$

と表される。

$$n+12=(n+7)+5=5k+5=5(k+1)$$

$$n+12=(n+5)+7=7l+7=7(l+1)$$

よって　$5(k+1)=7(l+1)$

5 と 7 は互いに素であるから，$k+1$ は 7 の倍数である。

よって，$k+1=7m$（m は自然数）と表される。

したがって，$n+12=5(k+1)=5\cdot 7m=35m$ より，$n+12$ は 35 の倍数である。

練習

(1)　84，126，630 の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(2)　n は自然数とする。$n+5$ は 3 の倍数，$n+6$ は 5 の倍数であるとき，$n+11$ は 15 の倍数であることを証明せよ。

(1)　$84=2^2\cdot 3\cdot 7$，$126=2\cdot 3^2\cdot 7$，$630=2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$

よって，最大公約数は $2\cdot 3\cdot 7=42$，最小公倍数は $2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=1260$

(2)　$n+5$ は 3 の倍数，$n+6$ は 5 の倍数であるから

$$n+5=3k,\ n+6=5l\ (k,\ l \text{ は自然数})$$

と表される。

$$n+11=(n+5)+6=3k+6=3(k+2)$$

$$n+11=(n+6)+5=5l+5=5(l+1)$$

よって　$3(k+2)=5(l+1)$

3 と 5 は互いに素であるから，$k+2$ は 5 の倍数である。

よって，$k+2=5m$（m は自然数）と表される。

したがって，$n+11=3(k+2)=3\cdot5m=15m$ より，$n+11$ は 15 の倍数である。

第 8 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] アイ：12，ウエオ：480

[解説]

それぞれ素因数分解すると [A]

$$60=2^2\cdot3\cdot5$$

$$96=2^5\cdot3$$

よって，最大公約数は

$$2^2\cdot3=\mathbf{12}$$ [A]

最小公倍数は

$$2^5\cdot3\cdot5=\mathbf{480}$$ [A]

[A]　最大公約数，最小公倍数を求めたい数をそれぞれ素因数分解し
最大公約数
⇒共通な素因数で指数が最小のもの
最小公倍数
⇒すべての素因数で指数が最大のもの
を選び，その積を求める。

2

[正解] カ：③，キ：4，ク：3，ケ：4

[解説]

[証明]

$n+4$ は 3 の倍数，$n+3$ は 4 の倍数であるから

$$\boldsymbol{n+4=3k},\ \boldsymbol{n+3=4l}\quad (k,\ l \text{ は自然数})$$

と表される。

$$n+7=(n+4)+3=3k+3=3(k+1)$$

$$n+7=(n+3)+4=4l+4=4(l+1)$$

よって　$3(k+1)=4(l+1)$

3 と 4 は互いに素であるから，$k+1$ は 4 の倍数である。 [B] [C]

よって，$k+1=4m$　(m は自然数)　と表される。

したがって，$n+7=3(k+1)=3\cdot4m=12m$ より，$n+7$ は 12 の倍数である。

[B]　2 つの整数 a，b について，共通な素因数がないとき，a と b は互いに素であるという。

[C]　a，b が互いに素で，ak が b の倍数のとき，k は b の倍数である（a, b, k は整数）。